ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

**CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE**

SESSION 1993

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée: 4 heures

Nota: les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer clairement leur numéro.
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondant aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET N°1

Soient $f(t) = f_x(t) = \dfrac{1}{(\operatorname{ch} t)^x}$ et $I(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. [On rappelle que $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.]

(1) Démontrer que l'intégrale définissant $I(x)$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

(2) Calculer au moyen de primitives les valeurs $\boxed{I(1)}$ et $\boxed{I(2)}$.

(3) Entre les variables $t \in [0,+\infty[$ et $u \in [0,\pi/2[$, on considère la relation $\operatorname{ch}t.\cos u = 1$. Montrer qu'elle établit une certaine bijection ψ de $[0,+\infty[$ vers $[0,\pi/2[$, que l'on étudiera et représentera graphiquement, avec t en abscisse et u en ordonnée. Préciser la *concavité*.

(4) Exprimer la suite $(W(m))$ définie par $W(m) = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^m\,du$ en fonction de la suite $(I(n))$ (m est entier ≥ 0 et n est entier ≥ 1).

SUJET N°2

(1) On pose $g(x) = x+x^5$. Démontrer que, pour tout réel t, l'équation $g(x)=t$ admet une racine réelle, et une seule. On notera désormais $r(t)$ cette unique racine.

(2) On suppose que t tend vers 0. Établir le développement limité $r(t) = t - t^5 + o(t^5)$.

(3) On suppose maintenant que t tend vers $+\infty$. Déterminer deux constantes $\boxed{A}$ et $\boxed{\alpha}$ telles que $r(t) \sim At^{\alpha}$.

(4) Démontrer que l'équation $g(x)=t$ admet, outre $r(t)$, 4 autres racines *non réelles distinctes* telles que chaque *quadrant* en contient *une et une seule*. Pour ce faire, on pourra par exemple poser $z=\rho e^{i\theta}$ dans $z+z^5=t$, avec $\rho>0$ et $\theta\in[0,\pi]$, puis éliminer ρ entre $\rho^5 e^{5i\theta} + \rho e^{i\theta} = t$ et $\rho^5 e^{-5i\theta} + \rho e^{-i\theta} = t$, afin de se ramener à la discussion de l'équation en θ suivante: $h(\theta)=t^4$, avec $h(\theta) = -\dfrac{\sin\theta.\sin^4 4\theta}{\sin^5 5\theta}$.

SUJET N°3

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

(1) Prouver que la suite (a_n) tend vers 0. [On pourra utiliser l'inégalité $|a_n| \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$.]

(2) On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Établir la formule ("Im" signifie "partie imaginaire de"):

$$S_n = \mathrm{Im} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + e^{ix}\cos x} - R_n(x), \quad \text{avec } R_n(x) = \mathrm{Im} \int_0^{\pi/2} \frac{(-e^{ix}\cos x)^{n+1}}{1 + e^{ix}\cos x} \, dx.$$

(3) Démontrer que $|R_n(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(4) En déduire la *somme* $\boxed{s}$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

SUJET N°4

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

(1) Démontrer que f est *dérivable* en $x = 0$.

(2) Établir que, si $x > 0$, f admet une dérivée d'ordre n de la forme $f^{(n)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} P_n(\frac{1}{x})$, où $P_n(y)$ est un certain *polynôme*. Déterminer $\boxed{P_1(y)}$ et $\boxed{P_2(y)}$.

(3) Prouver que f est dérivable à tout ordre n en $x=0$.

(4) On introduit la fonction g telle que $g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$. Donner pour g son tableau de variation et sa *courbe représentative*. Démontrer qu'elle est dérivable à tout ordre n en tout x réel.

SUJET N°5

Soit E_3 l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de degré ≤ 3.

(1) A tout réel ξ on associe la forme linéaire f_ξ sur E_3, définie par $f_\xi(P) = P(\xi)$. Montrer que les formes f_a , f_b, f_c , f_d sont indépendantes si, et seulement si, les réels a, b, c, d sont distincts.

(2) Montrer l'existence de réels $\boxed{x_0, x_1, x_2, x_3}$, uniques, tels que $\int_0^1 P(t)dt = x_0 P(0) + x_1 P(1) + x_2 P(2) + x_3 P(3)$ pour tout $P \in E_3$, et les déterminer numériquement. [On pourra considérer en particulier $Q_0(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$, $Q_1(t) = t(t-2)(t-3)$, $Q_2(t) = t(t-1)(t-3)$ et $Q_3(t) = t(t-1)(t-2)$.]

(3) Montrer l'existence de réels $\boxed{A, B, a, b}$, uniques, tels que $\int_0^1 P(t)dt = A P(a) + B P(b)$ pour tout $P \in E_3$, et les déterminer numériquement.

(4) Montrer l'existence de réels $\boxed{u, v, w}$, uniques, tels que $\int_0^1 P(t)dt = \frac{1}{3}(P(u)+P(v)+P(w))$ pour tout $P \in E_3$, et les déterminer numériquement.